

Die Umkehrung ist falsch:

$$\alpha_m := (-1)^m, \quad \beta_n \rightarrow 0$$

↑ 7. Lektion

Beweisverlauf: Details zu finden in

Barner + Flohr, Analysis I, p. 458f

1^{ter} Schritt: unter Benutzung von Formeln

Wie

$$y \notin 2\pi\mathbb{Z}: \sum_{k=-m}^m e^{iky} = \frac{\cos(my) - \cos((m+1)y)}{1 - \cos y}$$

zeige man durch Rechnung

$$S_m(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(my) - \cos((m+1)y)}{1 - \cos y} f(x+y) dy$$

$$(S_m(x) = \sum_{k=-m}^m \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-iky} f(y) dy e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-m}^m \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik(y-x)} f(y) dy = \dots)$$

2^{ter} Schritt: durch Mitteln bekommt man (beachte: aufeinanderfolgende Summanden kürzen sich)

$$\underline{(1)} \quad \sigma_n(x) = \frac{1}{n} \left(S_0(x) + \dots + S_{n-1}(x) \right) =$$

$$\frac{1}{2\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos(ny)}{1 - \cos y} f(x+y) dy =$$

$$\frac{1}{2\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin\left(\frac{ny}{2}\right)}{\sin(y/2)} \right)^2 f(x+y) dy$$

Def: $K_n(y) := \frac{1}{2\pi n} \left(\frac{\sin\left(\frac{ny}{2}\right)}{\sin(y/2)} \right)^2$

heißt Fejér'scher Kern

es gilt: $K_n \geq 0$ und

$$(2) \quad \int_{-\pi}^{\pi} K_n(y) dy = 1,$$

(benutze (1) für $f \equiv 1$, beachte $S_m = 1$ in diesem Fall, also $b_n = 1$)

(2) liefert

$$(3) \quad f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} K_n(y) \underline{f(x)} dy$$

und die Variablentransformation $y \rightarrow -y$ in (1) ergibt

$$(4) \quad b_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} K_n(y) f(x-y) dy$$

denn K_n ist gerade.

3^{ter} Schritt : Addition von (1) und (4) liefert

$$\underline{\underline{(5)}} \quad \tilde{b}_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} K_n(y) \frac{f(x+y) + f(x-y)}{2} dy$$

Nun kombiniere (5) mit (3) $\implies$

$$|f(x) - \tilde{b}_n(x)| = \left| \int_{-\pi}^{\pi} K_n(y) \left\{ \frac{f(x+y) + f(x-y)}{2} - f(x) \right\} dy \right|$$

Idee: auf $[-\delta, \delta]$ ist $|\{ \dots \}|$ klein,

auf dem Rest ist K_n klein für

$n \gg 1$, da $K_n(y) = \frac{1}{2\pi n} (\dots)^2$

$\implies \tilde{b}_n(x) \rightarrow f(x), n \rightarrow \infty$

□

Bemerkung: Ist $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig
und 2π -periodisch, so ergibt eine
genaue Durchsicht des letzten Beweisteils:

$$G_n \rightrightarrows f$$

Andererseits hat G_n die Form

$$X \mapsto \sum_{k=-N}^N d_k e^{ikx}$$

mit passendem N und $d_k \in \mathbb{C}$ (nachrechnen!).

Eine solche Funktion heißt trigonometrisches

Polynom.

Somit bekommt man als Analogon zum
Weierstraßschen Approximationssatz im
Kontext von periodischen Funktionen

Korollar: Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und 2π -periodisch. Dann gibt es eine Folge (P_n) trigonometrischer Polynome mit

$$P_n \rightrightarrows f \text{ auf } \mathbb{R}.$$

Mit diesem Korollar nähern wir uns der Beantwortung von

Wann gilt $f = \text{Fourier-Reihe}$ von f ?

Satz 15.7 (Identitätssatz)

Seien $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und 2π -periodisch. Sind die Fourier-Koeff. gleich, so folgt: $f = g$.

Beweis: (Aufgabe 1, Blatt 5)

Sei $h := f - g \Rightarrow$ alle Fourier-Koeff. = 0;

Wähle Folge P_n wie im Korollar mit

$$P_n \rightrightarrows h$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} h(x) \overline{P_n(x)} dx = 0;$$

es folgt:

$$\int_0^{2\pi} |h(x)|^2 dx = \int_0^{2\pi} h(x) \overline{h(x)} dx =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} h(x) \overline{P_n(x)} dx = 0 \Rightarrow$$

$h = 0$ auf $[0, 2\pi]$ und damit auf $\mathbb{R}$.



Gegeben sei eine stetige und 2π -
periodische Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$.
Ist die Fourier-Reihe $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$

gleichmäßig konvergent, so konvergiert

sie gegen f , d.h.

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

$$\text{mit } c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx.$$

Hinreichend für die glm. Konvergenz
der Reihe ist etwa

$$(*) \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k| < \infty$$

Beweis: Wegen der vorausgesetzten glm.

Konvergenz ist $g(x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$

stetig . Offenbar gilt:

k ter Fourier-Koeff von $g = c_k$

Satz
 $\xrightarrow{15.7} f = g \quad \square$

Anwendung: Mit 15.8 folgt für $x \in \mathbb{R}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\pi}{2} - x, \quad 0 \leq x \leq \pi \\ x - \frac{3}{2}\pi, \quad \pi \leq x \leq 2\pi \end{array} \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(1 - (-1)^n)}{\pi n^2} \cdot \cos(nx)$$

+ periodische Fortsetzung

(Sägezahnfkt.)

$\Rightarrow$
 $x=0$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^2}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{2}{(2n-1)^2}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}}$$

Die entscheidende Voraussetzung in 15.8 ist die gleichmäßige Konvergenz der Fourier-Reihe, die nicht aus der Stetigkeit von f abgeleitet werden kann. Für geben Punkte $x \in \mathbb{R}$, nur stetige f kann es sogar Punkte $x \in \mathbb{R}$, wo die formale Fourier-Reihe gar nicht konvergiert!

Ist φ noch schlechter, also wie im Satz von Fejér vorausgesetzt, so muss man tatsächlich die Hoffnung auf punktweise Darstellung

$$\varphi(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

aufgeben. Aber man hat noch

Konvergenz im Sinne der Hilbert-Norm

Def. 15.4 Seien $f, g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ wie im Satz von Fejér. Man definiert das Skalarprodukt von f mit g durch

$$\langle f, g \rangle := \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Eigenschaften:

- 1.) f, g reell $\implies \langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$
- 2.) $\langle g, f \rangle = \overline{\langle f, g \rangle}$
- 3.) $\langle f_1 + f_2, g \rangle = \langle f_1, g \rangle + \langle f_2, g \rangle$
- 4.) $\langle f, g_1 + g_2 \rangle = \langle f, g_1 \rangle + \langle f, g_2 \rangle$
- 5.) $\langle cf, g \rangle = c \langle f, g \rangle \quad \forall c \in \mathbb{C}$
- 6.) $\langle f, cg \rangle = \overline{c} \langle f, g \rangle$
- 7.) $\langle f, f \rangle \geq 0$
- 8.) f stetig und $\langle f, f \rangle = 0 \implies f = 0$

nachrechnen !

Außerdem gilt

Ungleichung von
Cauchy und Schwarz

$$: \quad |\langle f, g \rangle|^2 \leq \langle f, f \rangle \langle g, g \rangle$$

Beweis: Man setzt $\gamma(t) := \langle f + tg, f + tg \rangle$
für $t \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\underset{7)}{0} \leq \underset{3)-6)}{\gamma(t)} = \langle f, f \rangle + 2t \langle f, g \rangle + t^2 \langle g, g \rangle$$

wenn wir f und g als reellwertig annehmen.

Fall 1: $\langle g, g \rangle = 0$

Gemäß $\gamma \geq 0$ muss dann $\langle f, g \rangle = 0$
gelten, die Beh. ist trivial!

Fall 2: $\langle g, g \rangle > 0$

Dann ist γ eine nach oben geöffnete Parabel
mit genau einem absoluten Minimum in t

$$\Rightarrow 0 = \gamma'(\tilde{t}) = 2 \langle f, g \rangle + 2\tilde{t} \langle g, g \rangle$$

$$\Rightarrow \tilde{t} = - \langle f, g \rangle / \langle g, g \rangle$$

$$\text{Es folgt: } 0 \leq \gamma(\tilde{t}) = \langle f, f \rangle - 2 \frac{\langle f, g \rangle^2}{\langle g, g \rangle} + \frac{\langle f, g \rangle^2}{\langle g, g \rangle}$$

$$\Rightarrow \frac{\langle f, g \rangle^2}{\langle g, g \rangle} \leq \langle f, f \rangle$$

Komplexwertige f, g : analog mit 2) □ $\uparrow$ Termin 8

Def 15.5 : a) Hilbert - Norm von f

$$\|f\|_2 := \langle f, f \rangle^{1/2} = \left(\int_0^{2\pi} |f|^2 dx \right)^{1/2}$$

b) f ist senkrecht zu g (i.Z. $f \perp g$)

$$:\Leftrightarrow \langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle = 0$$